Recordatorio de razones trigonométricas básicas

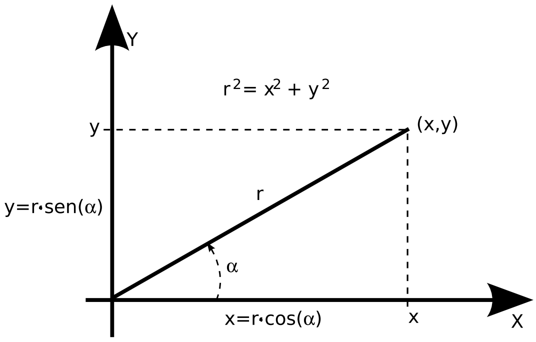
Índice

1. Introducción

La trigonometría es la parte de las matemáticas que estudia todos los elementos de un triángulo.

Para estudiar y representar funciones trigonométricas es conveniente trabajar con radianes en lugar de con grados.
La conversión es muy sencilla. Una vuelta de revolución completa son 360^o y el número de radianes de una circunferencia son 2π radianes.

Conviene recordar que las razones trigonométricas básicas son el seno, el coseno y la tangente. Estas definiciones son correctas para ángulos agudos (menores de 90^o).



$$\mathrm{sen}(\alpha) = \frac{y}{r}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{x}{r}$$

$$\mathrm{tg}(\alpha) = \frac{\mathrm{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{y/r}{x/r} = \frac{y}{x}$$

Para ver todos los casos se suele usar una circunferencia de radio 1 centrada en 0 llamada círculo unitario. En el resto de cuadrantes hay que tener en cuenta los signos que toman el seno y el coseno

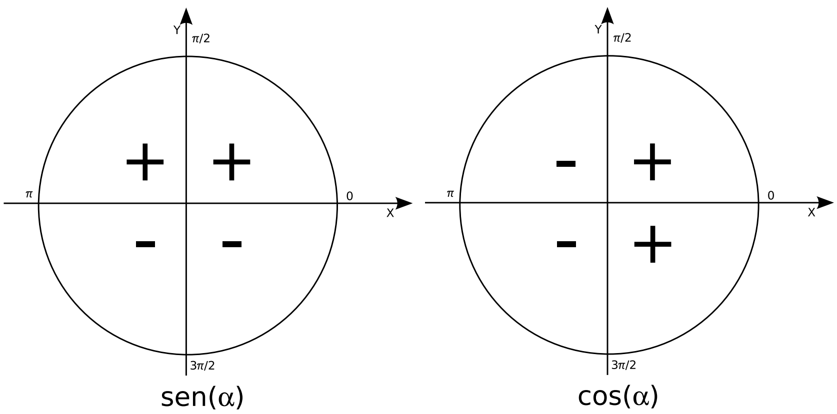


Figura 1: Signos del seno y el coseno.

2. Razones de 0 a 2π radianes

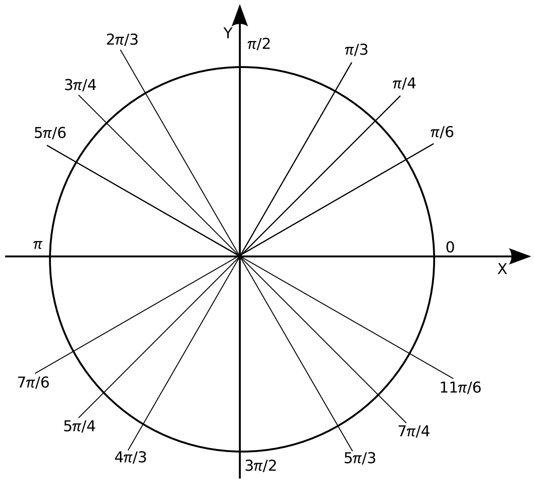
Para poder calcular las razones trigonométricas de un buen conjunto de ángulos sólo es necesario conocer algunos casos significativos del primer cuadrante y luego utilizar propiedades trigonométricas.

2.1. Razones en los ejes

	0 o 2π	$\pi/2$	π	$3\pi/2$
sen	0	1	0	-1
cos	1	0	-1	0
tg	0	–	0	–

2.2. Razones en el primer cuadrante: de 0 a $\pi/2$

	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$



<u>**Observación:**</u>
Es interesante darse cuenta que $\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$, o sea que son *complementarios*, y por ello ocurre:

- $\operatorname{sen}(\pi/6)=\cos(\pi/3)$.
- $\cos(\pi/6)=\operatorname{sen}(\pi/3)$.

Esta observación es una propiedad que puede usarse para calcular ángulos cuyas razones no conocemos usando las razones de otro que sumado al primero dé $\pi/2$:

$$\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cos(\alpha) \qquad \cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\operatorname{sen}(\alpha)$$

2.3. Reducir al primer cuadrante

Supongamos que α es un ángulo entre 0 y $\pi/2$ (está en el primer cuadrante).

2.3.1. Segundo cuadrante: de $\pi/2$ a π

$$\operatorname{sen}(\alpha+\frac{\pi}{2})=\cos(\alpha) \qquad \cos(\alpha+\frac{\pi}{2})=-\operatorname{sen}(\alpha)$$

Para calcular razones del segundo cuadrante aprovechando las conocidas del primero se usa la siguiente propiedad de los ángulos *suplementarios*:

$$\operatorname{sen}(\pi-\alpha)=\operatorname{sen}(\alpha) \qquad \cos(\pi-\alpha)=-\cos(\alpha)$$

2.3.2. Tercer cuadrante: de π a $3\pi/2$

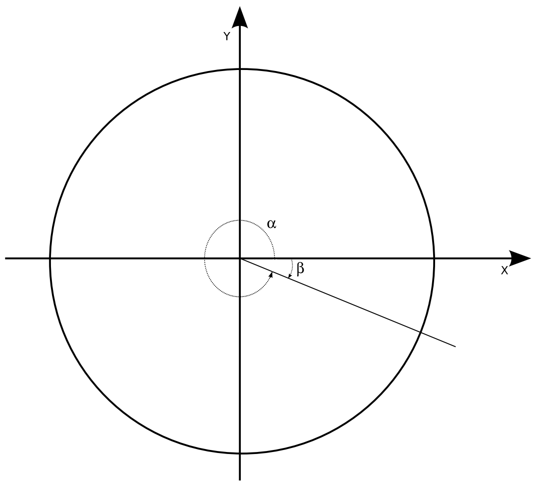
$$\operatorname{sen}(\alpha+\pi)=-\operatorname{sen}(\alpha) \qquad \cos(\alpha+\pi)=-\cos(\alpha)$$

2.3.3. Cuarto cuadrante: de $3\pi/2$ a 2π

- $\mathrm{sen}(-\alpha) = -\,\mathrm{sen}(\alpha)$.
- $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$.

Para cacular razones del cuarto cuadrante aprovechando otras conocidas del primero se utiliza la propiedad de ángulos *opuestos* tal y como se acaba de ver o de la siguiente forma:

- $\mathrm{sen}(2\pi - \alpha) = -\,\mathrm{sen}(\alpha)$.
- $\cos(2\pi - \alpha) = \cos(\alpha)$.



Observación:
En este caso está ocurriendo el siguiente hecho:
Supongamos que tenemos $\alpha = \frac{11\pi}{6}$ ...
Es equivalente trabajar con $\frac{11\pi}{6}$ que hacerlo con $-\frac{\pi}{6} = 2\pi - \frac{11\pi}{6}$.

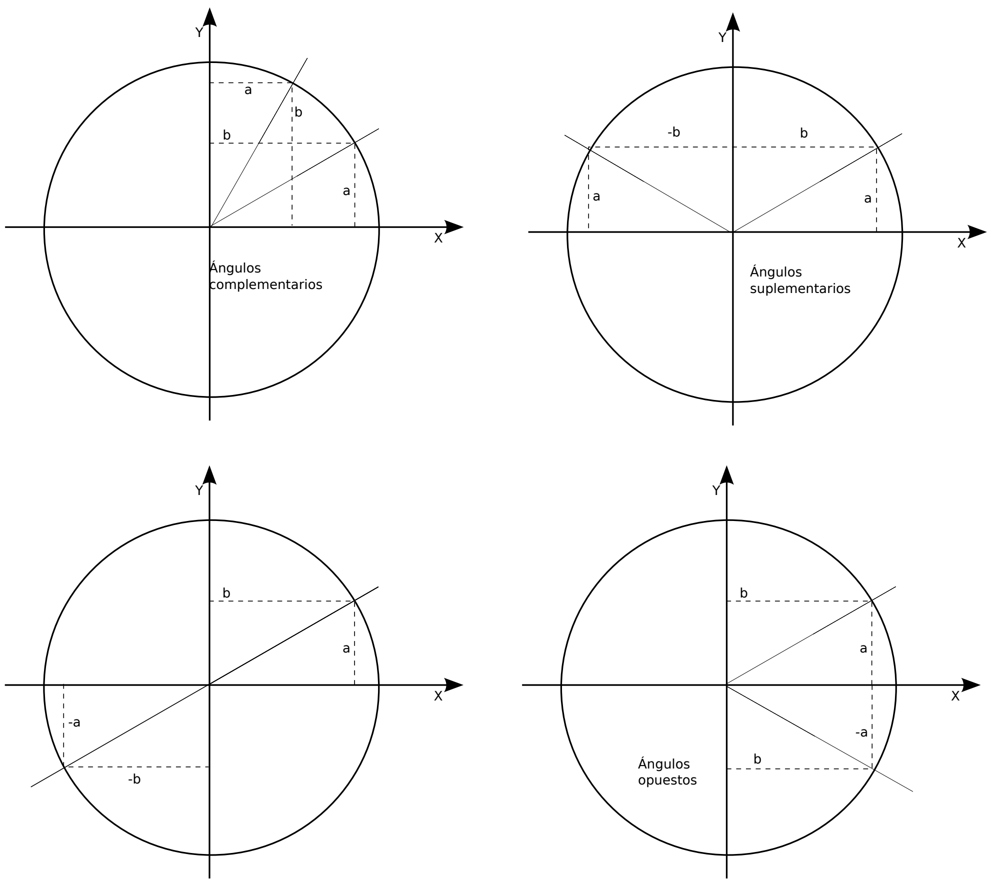


Figura 2: Relaciones entre ángulos complementarios, suplementarios, opuestos.

3. Razones de ángulos mayores que 2π radianes

En ese caso hay que utilizar la siguiente propiedad:

$$\forall k \in \mathrm{N} : \quad \operatorname{sen}(\alpha + 2k\pi) = \operatorname{sen}(\alpha) \qquad \cos(\alpha + 2k\pi) = \cos(\alpha)$$

<u>**Observación:**</u>
En el caso en el que tengamos un ángulo mayor que 2π podemos ir restando 2π hasta que esté en $[0, 2\pi]$.

Ejemplo 1 *Para convertir* $\frac{27\pi}{4}$ *en un ángulo cuyas razones trigonométricas conozcamos:*

$$\left\lfloor \frac{27\pi/4}{2\pi} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{27\pi}{8\pi} \right\rfloor = 3 \ \textit{(cociente)} \qquad \frac{27\pi}{4} - (3 \cdot 2\pi) = \frac{3\pi}{4}$$

Ya solo quedaría saber que $\operatorname{sen}(\frac{3\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4})$ *y que* $\cos(\frac{3\pi}{4}) = -\operatorname{sen}(\frac{\pi}{4})$.

4. Funciones hiperbólicas

Estas funciones se comportan de forma similar a las funciones trigonométricas:

Definición 1 (Seno y coseno hiperbólico) $\operatorname{senh}, \cosh : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ *se definen como:*

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

De hecho, sustituyendo valores: $\operatorname{senh}(0) = 0$ y $\cosh(0) = 1$. Para relacionar ambas magnitudes sabemos que:

$$\cosh^2(x) - \operatorname{senh}^2(x) = 1$$

Y permiten construir una trigonometría muy parecida a la trigonometría de la circunferencia, solo que en este caso las funciones no son periódicas y se representan sobre la hipérbola (parte derecha de la figura 3).

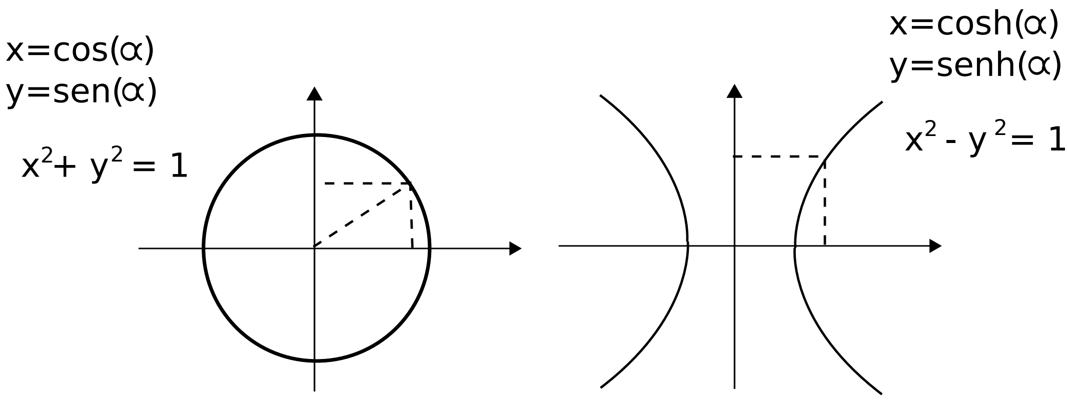


Figura 3: Trigonometría de la circunferencia e hiperbólica.

Se define también la tangente hiperbólica:

$$\operatorname{tgh} x = \frac{\operatorname{senh}(x)}{\cosh(x)}$$

Y las razones del ángulo doble o el cuadrado:

$$\operatorname{senh}(2x) = 2\operatorname{senh}(x)\cosh(x) \qquad \cosh(2x) = \cosh^2(x) + \operatorname{senh}^2(x)$$

$$\operatorname{senh}^2(x) = \frac{\cosh^2(x) - 1}{2} \qquad \cosh^2(x) = \frac{\cosh(2x) + 1}{2}$$

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$
sen	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
tg	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$

Cuadro 1: Tabla de razones trigonométricas conocidas