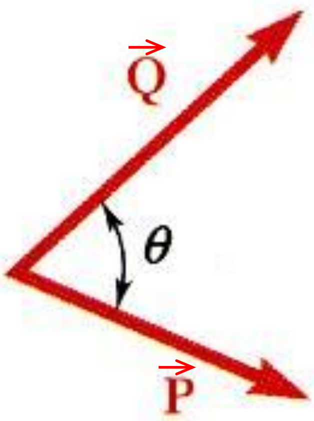
3.3. Producto Escalar



- El *producto escalar* entre dos vectores ***P*** y ***Q*** se define como

  $\vec{P} \bullet \vec{Q} = P \cdot Q \cdot \cos\theta$ es un escalar

- El producto escalar:
  - es conmutativo, $\vec{P} \bullet \vec{Q} = \vec{Q} \bullet \vec{P}$
  - es distributivo, $\vec{P} \bullet \left(\vec{Q}_1 + \vec{Q}_2\right) = \vec{P} \bullet \vec{Q}_1 + \vec{P} \bullet \vec{Q}_2$
  - no es asociativo, $\left(\vec{P} \bullet \vec{Q}\right) \bullet \vec{S}$ no está definido

- A partir de las componentes el resultado es:

$$\vec{P} \bullet \vec{Q} = \left(P_x \vec{i} + P_y \vec{j} + P_z \vec{k}\right) \bullet \left(Q_x \vec{i} + Q_y \vec{j} + Q_z \vec{k}\right)$$

$$\vec{i} \bullet \vec{i} = 1 \quad \vec{j} \bullet \vec{j} = 1 \quad \vec{k} \bullet \vec{k} = 1 \quad \vec{i} \bullet \vec{j} = 0 \quad \vec{j} \bullet \vec{k} = 0 \quad \vec{k} \bullet \vec{i} = 0$$

$$\vec{P} \bullet \vec{Q} = P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z$$

$$\vec{P} \bullet \vec{P} = P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 = P^2$$

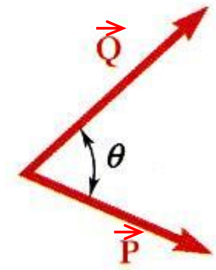
Estas dos transparencias son un adelanto del Tema 3

3.3. Producto Escalar

- Ángulo entre dos vectores:

$$\vec{P} \bullet \vec{Q} = P \cdot Q \cdot \cos\theta = P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z$$

$$\cos\theta = \frac{P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z}{P \cdot Q}$$

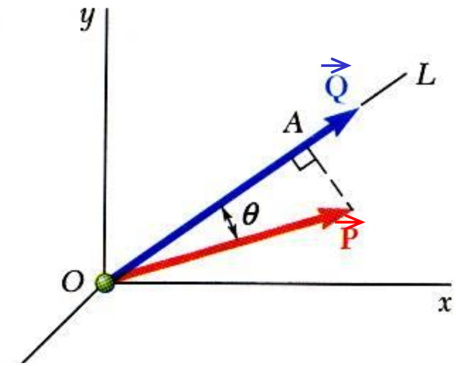


- Proyección de un vector sobre un eje:

$$P_{OL} = P\cos\theta = \text{ proyeccion de } P \text{ sobre } OL$$

$$\vec{P} \bullet \vec{Q} = PQ\cos\theta$$

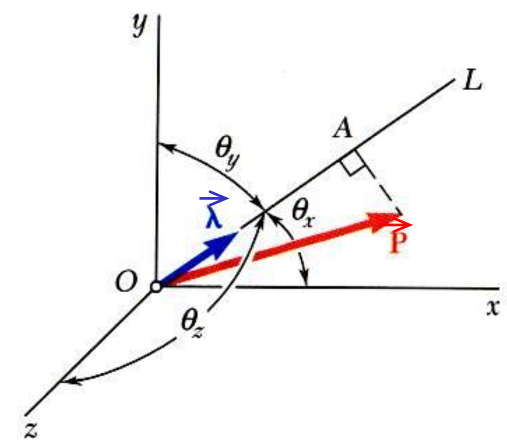
$$\frac{\vec{P} \bullet \vec{Q}}{Q} = P\cos\theta = P_{OL}$$



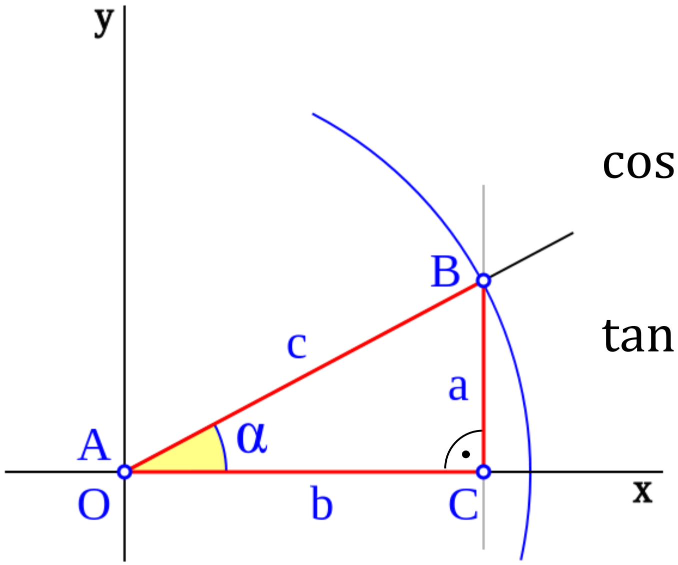
- Eso es lo mismo que utilizar un vector unitario:

$$P_{OL} = \vec{P} \bullet \left(\frac{\vec{Q}}{Q} \right) = \vec{P} \bullet \vec{\lambda}$$

$$= P_x \cos\theta_x + P_y \cos\theta_y + P_z \cos\theta_z$$



Trigonometría básica



$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{a}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

$$\tan\alpha = \frac{a}{b}$$

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$$

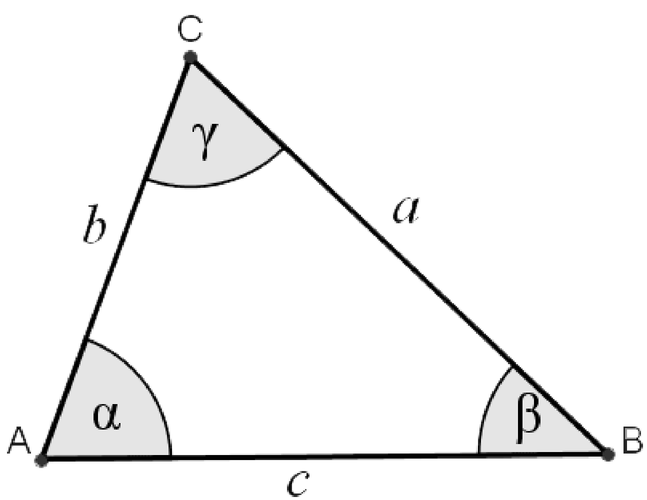
$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$

$$\operatorname{sen}(2\alpha) = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$$



Teorema del seno: $\dfrac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \dfrac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \dfrac{c}{\operatorname{sen}\gamma}$

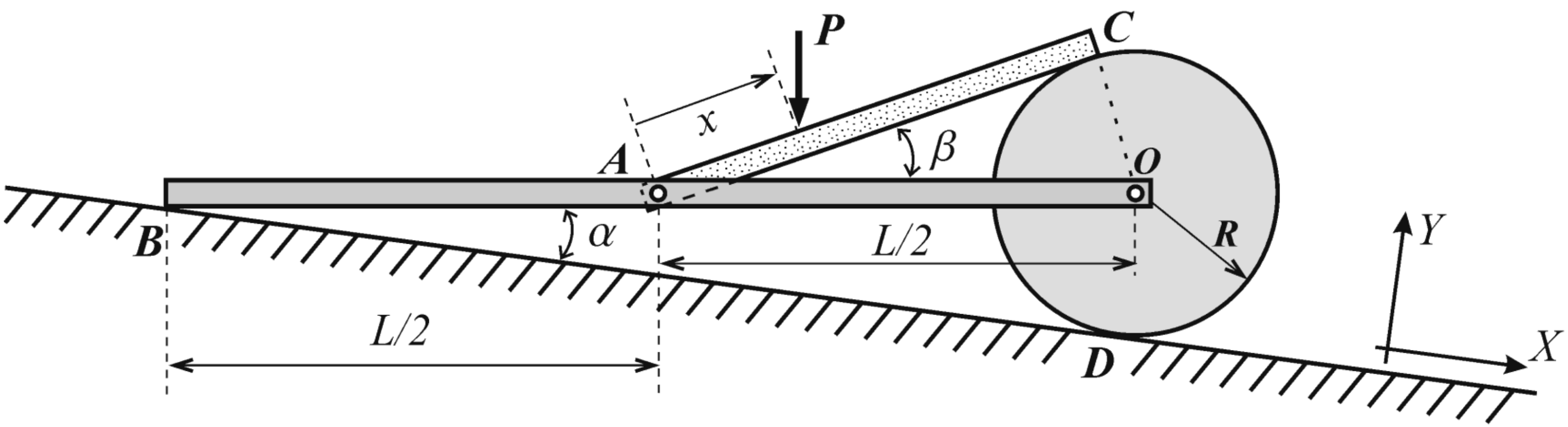
Teorema del coseno:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos\gamma$$

Ejemplo–2:

Sabiendo que L=8 m y que α=10º, hallar el radio del disco, la longitud de la barra AC (que es tangente al disco en el punto C) y el ángulo β.

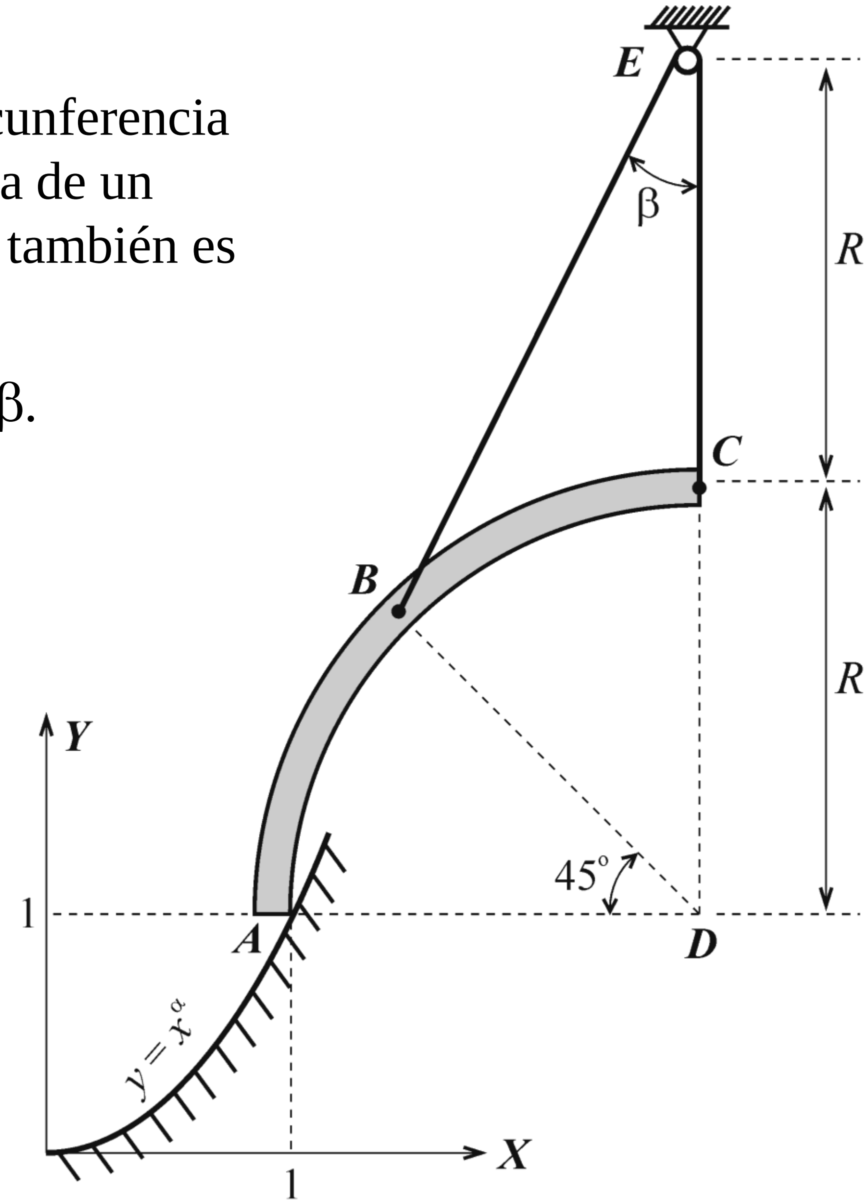
El espesor de las barras BAO y AC es despreciable.



Ejemplo–3:

La barra ABC es un cuarto de circunferencia de espesor despreciable que cuelga de un cable BEC. El radio de la polea E también es despreciable.

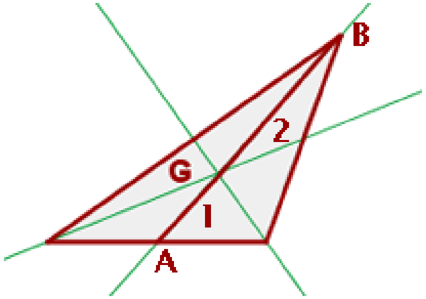
Se pide hallar el valor del ángulo β.



Baricentro o Centroide de un triángulo

El **baricentro** es el **punto de corte de las tres medianas**

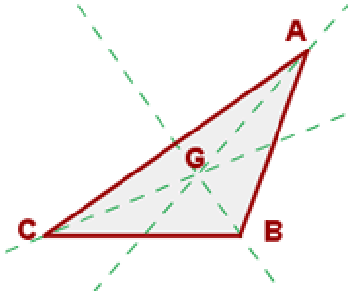
El **baricentro** se representa con la letra **G**



El Baricentro divide a cada mediana en dos segmentos. El segmento que une el baricentro con el vértice mide el doble que el segmento que une el baricentro con el punto medio del lado opuesto:

BG = 2·GA

Coordenadas del baricentro



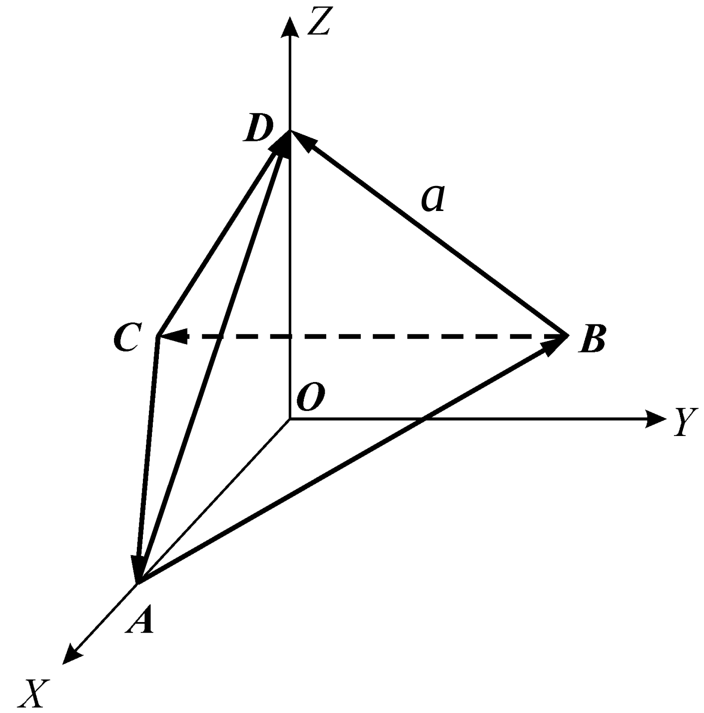
A (X_1, Y_1) ; B (X_2, Y_2) ; C (X_3, Y_3)

$$X_G = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3} \; ; \; Y_G = \frac{Y_1 + Y_2 + Y_3}{3}$$

Ejemplo–4:

Un tetraedro regular apoya en su cara ABC sobre el plano XY. El vértice D se encuentra situado sobre el eje Z.

Si las aristas del tetraedro se suponen de longitud conocida a, se pide hallar las coordenadas de sus cuatro vértices en función de a.



Cambios de unidades – Unidades coherentes

RECORDEMOS

- ***Unidades del Sistema Internacional* (SI)**

  El SI es el sistema de unidades empleado en la normativa vigente.

  Se definen uds. para la longitud el tiempo y la masa:

  metro (m)

  segundo (s)

  kilogramo (kg)

  La unidad de fuerza es derivada:

  newton (N):

$$F = ma$$

$$1\,\mathrm{N} = (1\,\mathrm{kg})\left(1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right) = 1\,\mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Otras unidades derivadas

Presión → Pascal (Pa)

Energía = Trabajo → Julio (J)

Potencia → Vatio (W)

El Sistema Internacional forma un conjunto de unidades coherentes, es decir, aquellas pueden expresarse unas en términos de otras sin necesidad de utilizar parámetros numéricos diferentes de 1 (uno).

Por ej: N, m, s, kg

¿Cómo relacionamos las unidades derivadas entre sí, o con las unidades básicas (m, s, kg)?

Utilizaremos lo que llamaremos "***Relaciones básicas entre magnitudes***"

Cambios de unidades – Unidades coherentes

Lo importante es que estas fórmulas básicas, nos darán relaciones válidas entre las unidades coherentes de las magnitudes que intervengan en ellas.

Otro ejemplo: $P = \rho \cdot g \cdot z$

De las relaciones básicas sabemos que $Pa = \frac{N}{m^2}$

Utilizando la fórmula obtenemos:

$$Pa = \frac{kg}{m^3} \cdot \frac{m}{s^2} \cdot m$$

$$Pa = \frac{kg \cdot m}{s^2} \cdot \frac{m}{m^3}$$

$$Pa = \frac{N}{m^2} \quad \text{correcto!}$$

Relaciones básicas entre magnitudes

ATENCIÓN: No son válidas siempre, sino sólo en determinados casos. Es decir, no podemos resolver cualquier problema de Mecánica con ellas, pero nos sirven para realizar siempre los cambios de unidades con seguridad:

$$F = m \cdot a$$

$$s = v \cdot t$$

$$v = a \cdot t$$

$$P = \frac{F}{S}$$

$$E_p = m \cdot g \cdot h$$

$$E = \mathrm{T}$$

$$\mathrm{T} = F \cdot d$$

$$W = \frac{\mathrm{T}}{t} = F \cdot v$$

Cambios de unidades – Unidades coherentes

MÚLTIPLOS y SUBMÚLTIPLOS

Multiplication Factor	Prefix†	Symbol
$1\,000\,000\,000\,000 = 10^{12}$	tera	T
$1\,000\,000\,000 = 10^{9}$	giga	G
$1\,000\,000 = 10^{6}$	mega	M
$1\,000 = 10^{3}$	kilo	k
$100 = 10^{2}$	hecto‡	h
$10 = 10^{1}$	deca ‡	da
$0.1 = 10^{-1}$	deci‡	d
$0.01 = 10^{-2}$	centi‡	c
$0.001 = 10^{-3}$	milli	m
$0.000\,001 = 10^{-6}$	micro	μ
$0.000\,000\,001 = 10^{-9}$	nano	n
$0.000\,000\,000\,001 = 10^{-12}$	pico	p
$0.000\,000\,000\,000\,001 = 10^{-15}$	femto	f
$0.000\,000\,000\,000\,000\,001 = 10^{-18}$	atto	a

Conviene saberlos todos, pero los que están en el recuadro rojo es totalmente obligatorio saberlos