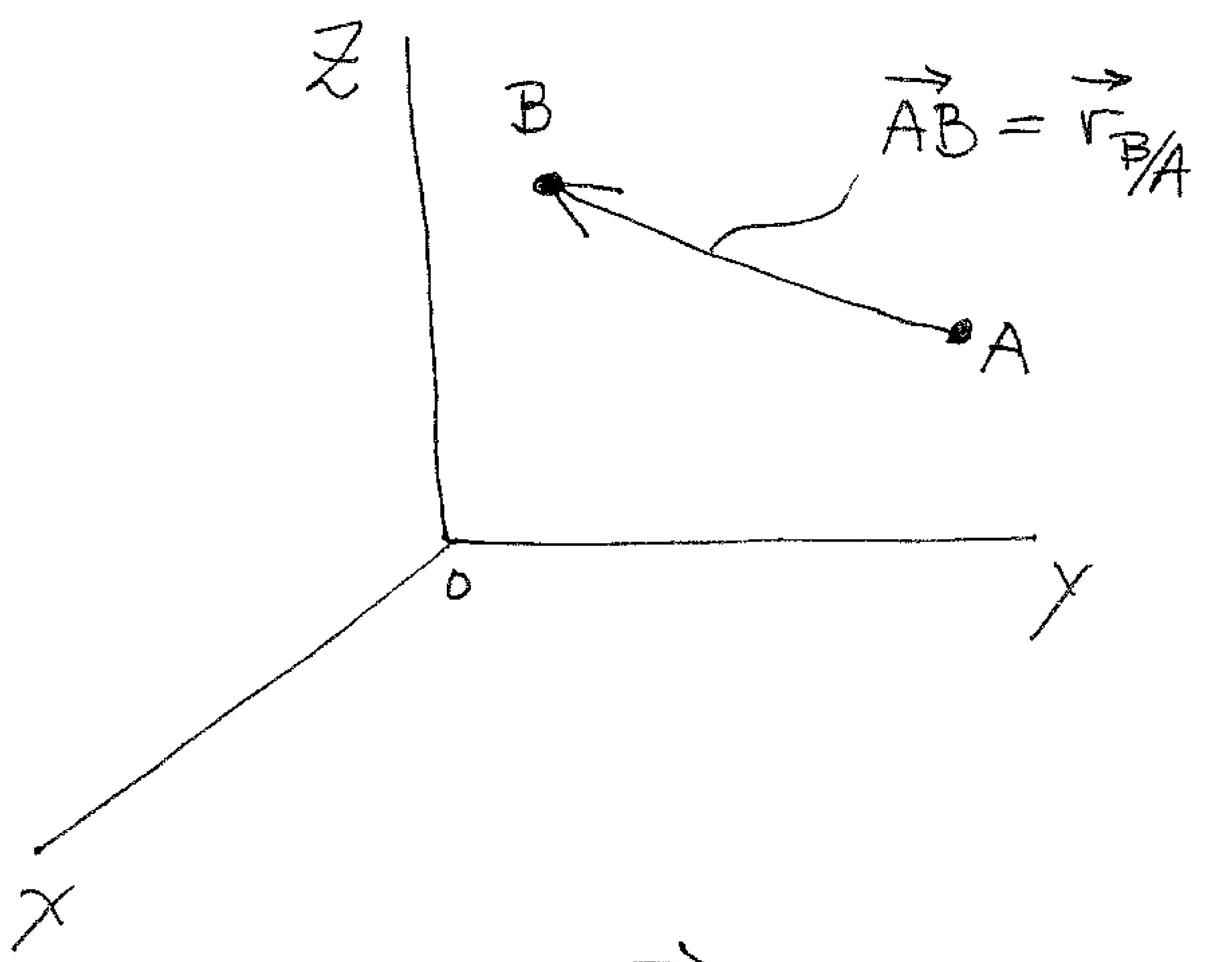
VECTORES GEOMÉTRICOS — VECTORES DE POSICIÓN

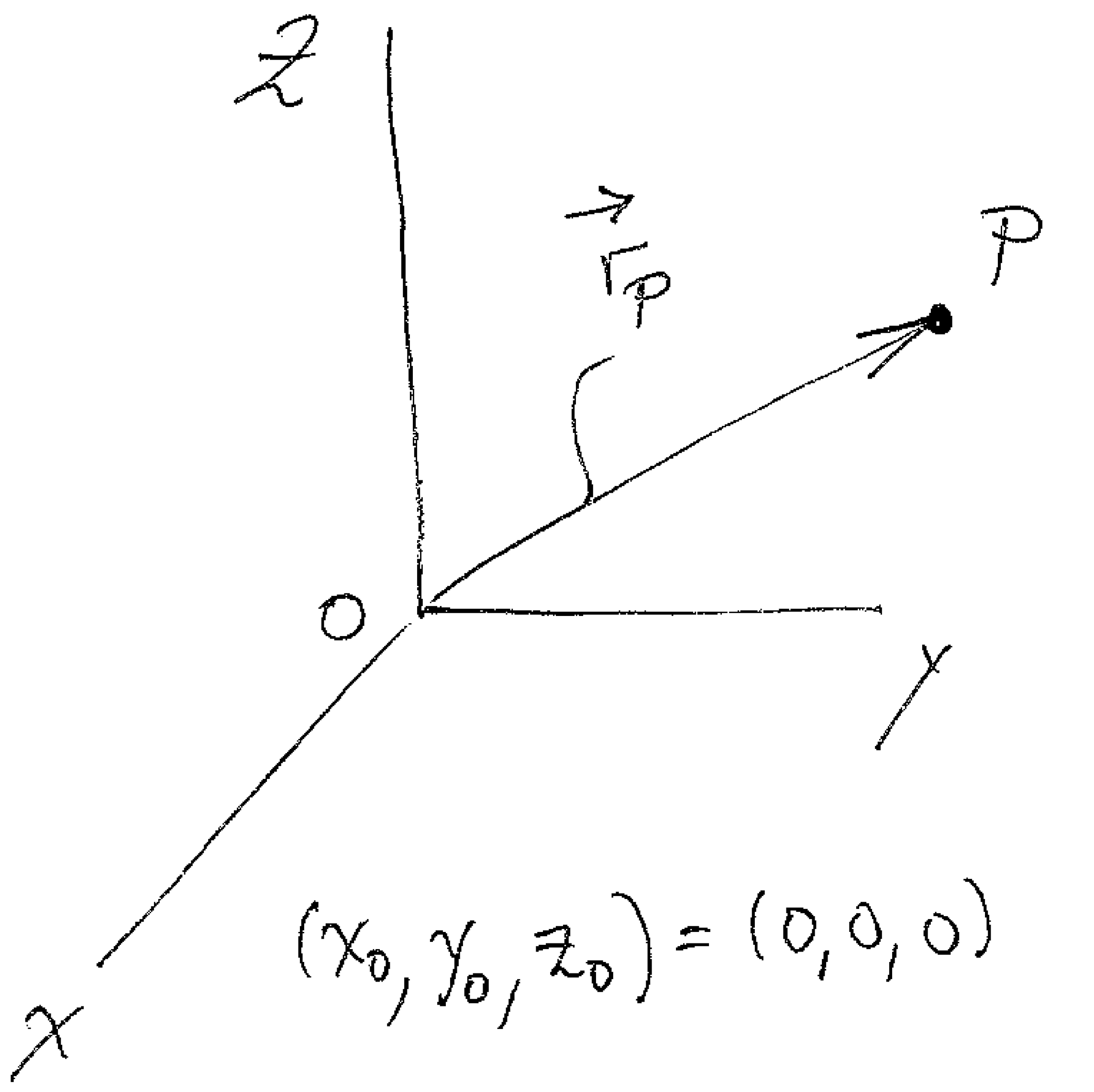


Llamamos "vector geométrico" al que une dos puntos del espacio:

$\vec{AB}$ = "coordenadas de B menos coordenadas de A"

$$\vec{AB} = (x_B - x_A,\ y_B - y_A,\ z_B - z_A) = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k}$$

En el Beer & Johnston suelen llamar a este tipo de vector como "vector de posición de B respecto de A". Es por tanto un "vector de posición relativo": $\vec{r}_{B/A} = \vec{AB}$



Si el extremo inicial es el origen de coordenadas se denomina "vector de posición absoluto" o simplemente "vector de posición":

$$\vec{r}_P = (x_P - x_O)\vec{i} + (y_P - y_O)\vec{j} + (z_P - z_O)\vec{k}$$

$$\vec{r}_P = x_P\vec{i} + y_P\vec{j} + z_P\vec{k}$$

<u>MÓDULO</u>: $AB = r_{B/A} = |\vec{AB}| = |\vec{r}_{B/A}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

Por las propiedades vistas del producto escalar:

$$\vec{AB} \cdot \vec{AB} = (AB)^2 = r_{B/A}^2 = |\vec{AB}|^2 = |\vec{r}_{B/A}|^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2$$

EJEMPLO – 1

Dados $A \equiv (3,0,0)\,m$, $B \equiv (2,1,0)\,m$, $C \equiv (-1,-2,3)\,m$ se pide:

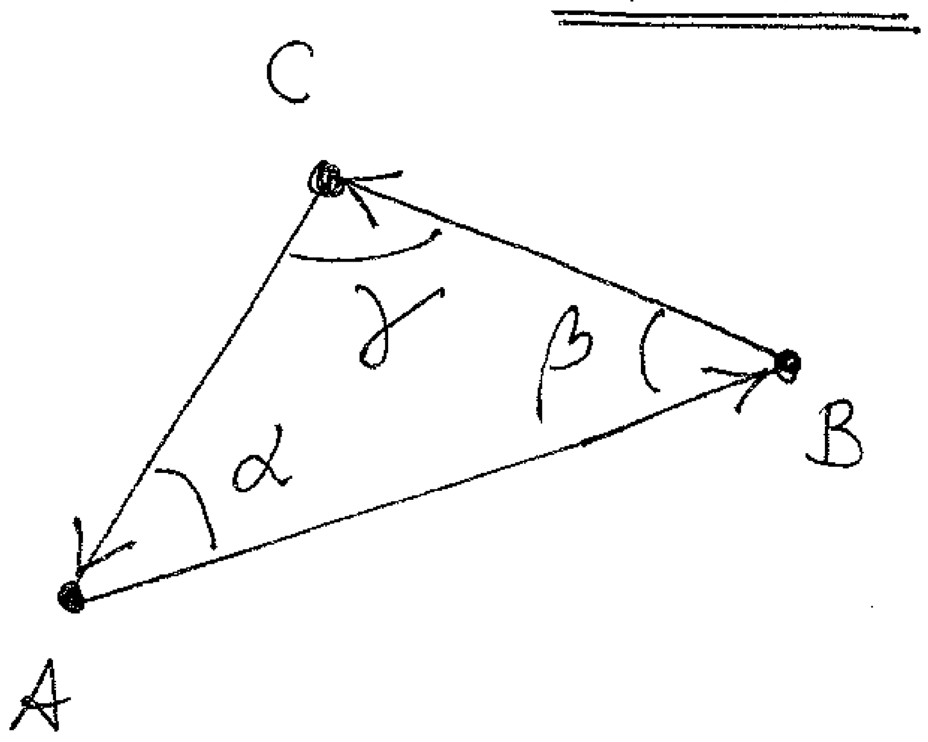
1) Hallar las longitudes de los lados del triángulo ABC y los ángulos de sus tres vértices

2) Hallar el ángulo formado por $\vec{AB}$ con el semieje Y positivo.

3) " " " " " $\vec{BC}$ " " " Z negativo.

SOLUCIÓN :

PLANO ABC



1) $\vec{AB} = (2,1,0) - (3,0,0) = -\vec{i} + \vec{j}$ (m)

$\vec{BC} = (-1,-2,3) - (2,1,0) = -3\vec{i} - 3\vec{j} + 3\vec{k}$ (m)

$\vec{CA} = (3,0,0) - (-1,-2,3) = 4\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$ (m)

$AB = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}\ m$; $BC = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2 + 3^2} = 3\sqrt{3}\ m$; $\vec{CA} = \sqrt{4^2 + 2^2 + (-3^2)} =$

$= \sqrt{29}\ m$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{AB} \bullet \vec{AC}}{AB \cdot AC} = \frac{\vec{AB} \bullet (-\vec{CA})}{AB \cdot AC} = \frac{(-1)\cdot(-4) + 1\cdot(-2) + 0\cdot 3}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{29}} = 0'2626$$

$\Rightarrow \alpha = \arccos(0'2626) = 1'305\ \cancel{rad} \cdot \dfrac{180^\circ}{\pi\ \cancel{rad}} = 74'78^\circ \longleftarrow$ De las dos soluciones del arcoseno se toma la menor de 180°

Teorema del seno :

$$\frac{BC}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{AB}{\operatorname{sen}\gamma} = \frac{CA}{\operatorname{sen}\beta} \Rightarrow$$

$\gamma = \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{AB \cdot \operatorname{sen}\alpha}{BC}\right) = 15'22^\circ \longleftarrow$ No puede ser la otra solución del arcsen porque si no $\alpha + \gamma > 180^\circ$

$\beta = \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{CA \cdot \operatorname{sen}\alpha}{BC}\right) = 89'99^\circ \approx 90^\circ$

También $\beta = 180^\circ - \alpha - \gamma = 180 - 74'78^\circ - 15'22^\circ = 90^\circ$ En efecto $\vec{AB} \perp \vec{BC}$

2) Llamamos θ al ángulo formado por $\vec{AB}$ y el semieje Y(+)

$$\vec{AB} \cdot \vec{j} = AB \cdot 1 \cdot \cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{j}}{AB} = \vec{\lambda}_{AB} \cdot \vec{j}$$

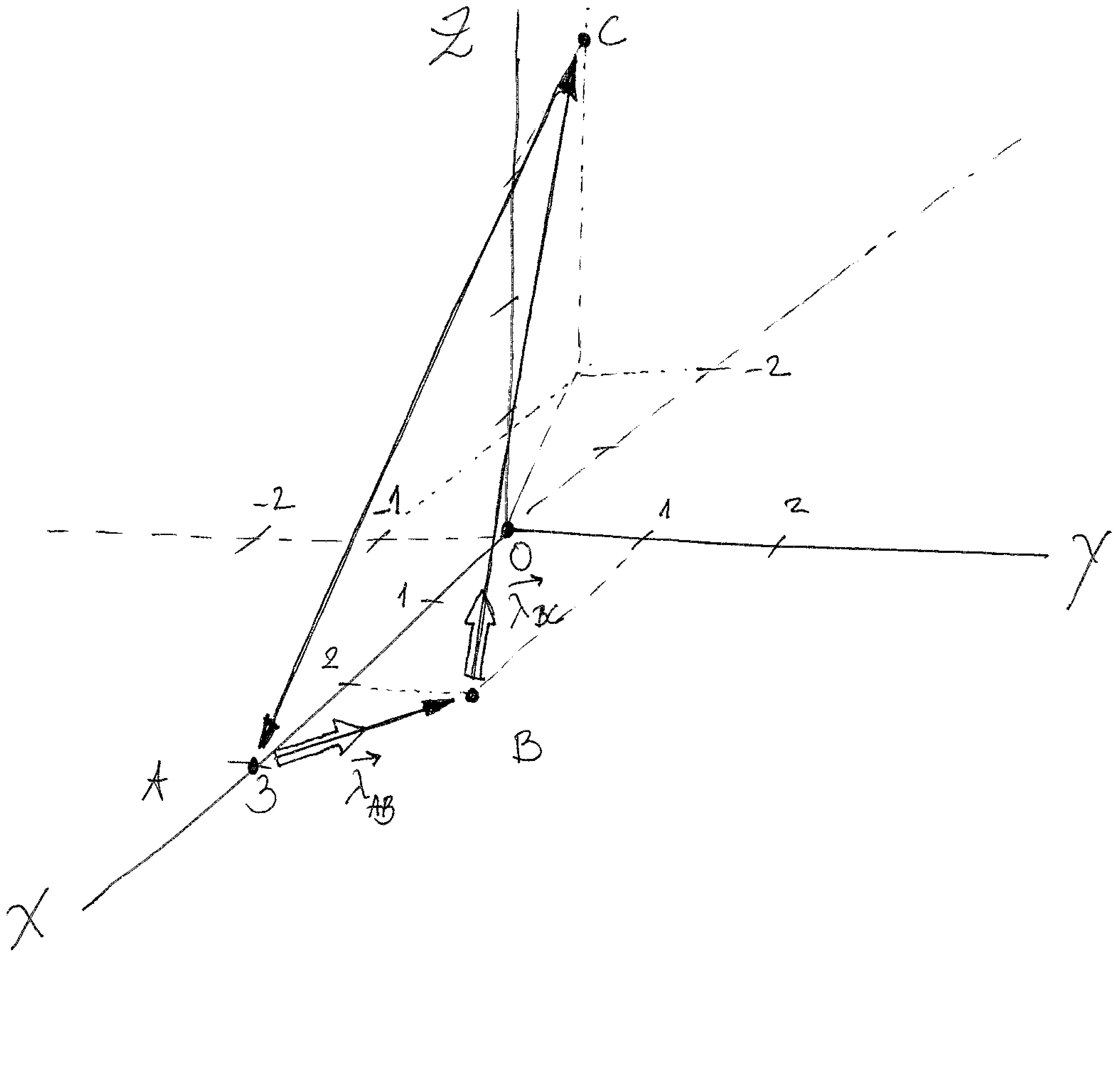
$\vec{\lambda}_{AB} = \dfrac{\vec{AB}}{AB}$ es un vector unitario : $\vec{\lambda}_{AB} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-\vec{i} + \vec{j})$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\vec{i} + \vec{j}) \cdot \vec{j} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = 45^\circ$$

3) Llamamos φ al ángulo formado por $\vec{BC}$ y el semieje Z(−)

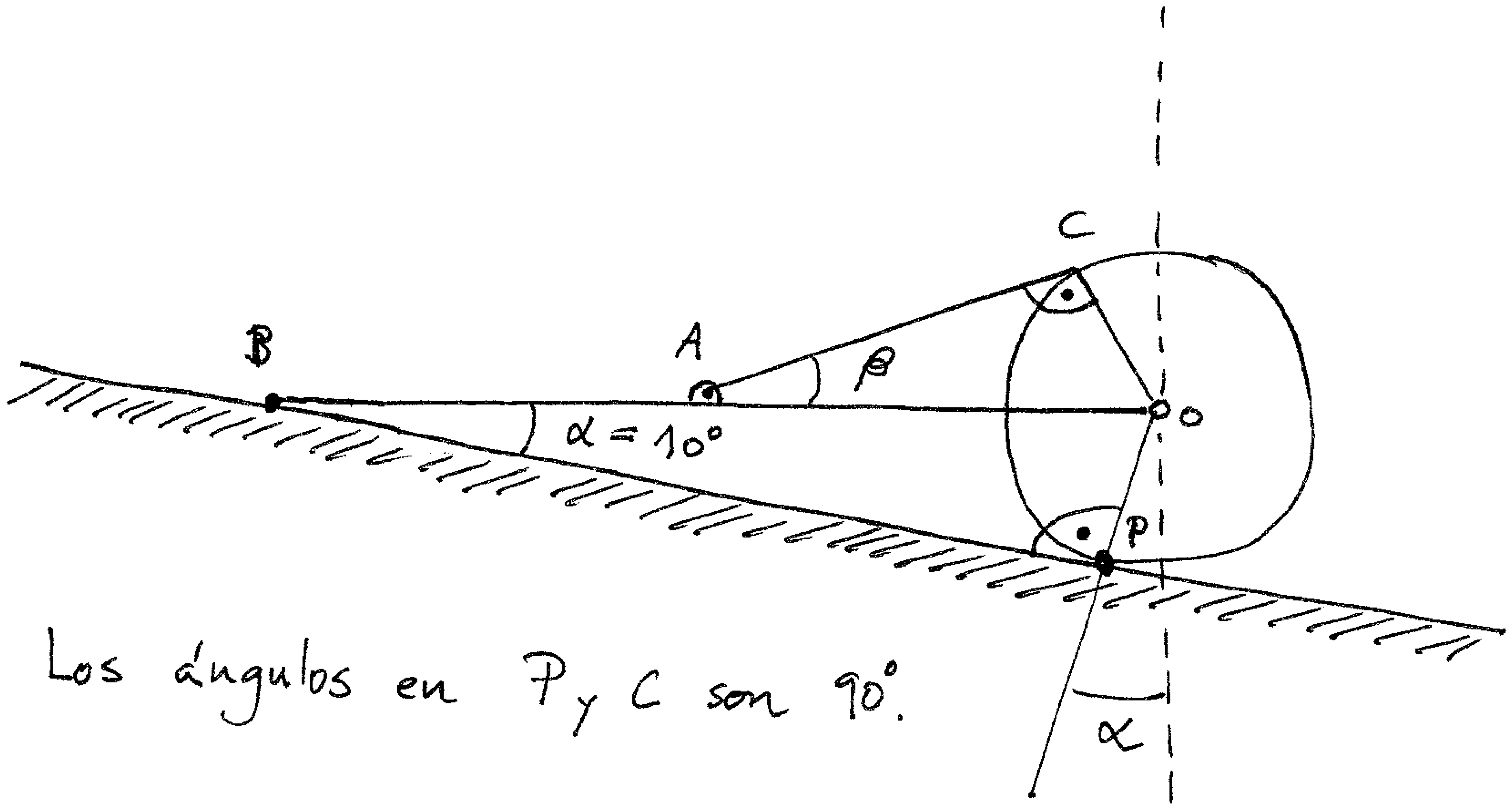
Análogamente : $\vec{\lambda}_{BC} = \dfrac{\vec{BC}}{BC} = \dfrac{1}{3\sqrt{3}}(-3\vec{i} - 3\vec{j} + 3\vec{k}) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(-\vec{i} - \vec{j} + \vec{k})$

$$\vec{\lambda}_{BC} \cdot (-\vec{k}) = 1 \cdot 1 \cdot \cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \varphi = 125'3^\circ$$



EJEMPLO – 2

MUY IMPORTANTE: Cuando en un enunciado de un ejercicio nos dicen que el espesor de una barra es "despreciable", eso indica que, a efectos de los cálculos, podemos considerarla como una línea recta (o curva, si la barra es curva como en el ejemplo 3 siguiente)



Los ángulos en P y C son 90°.

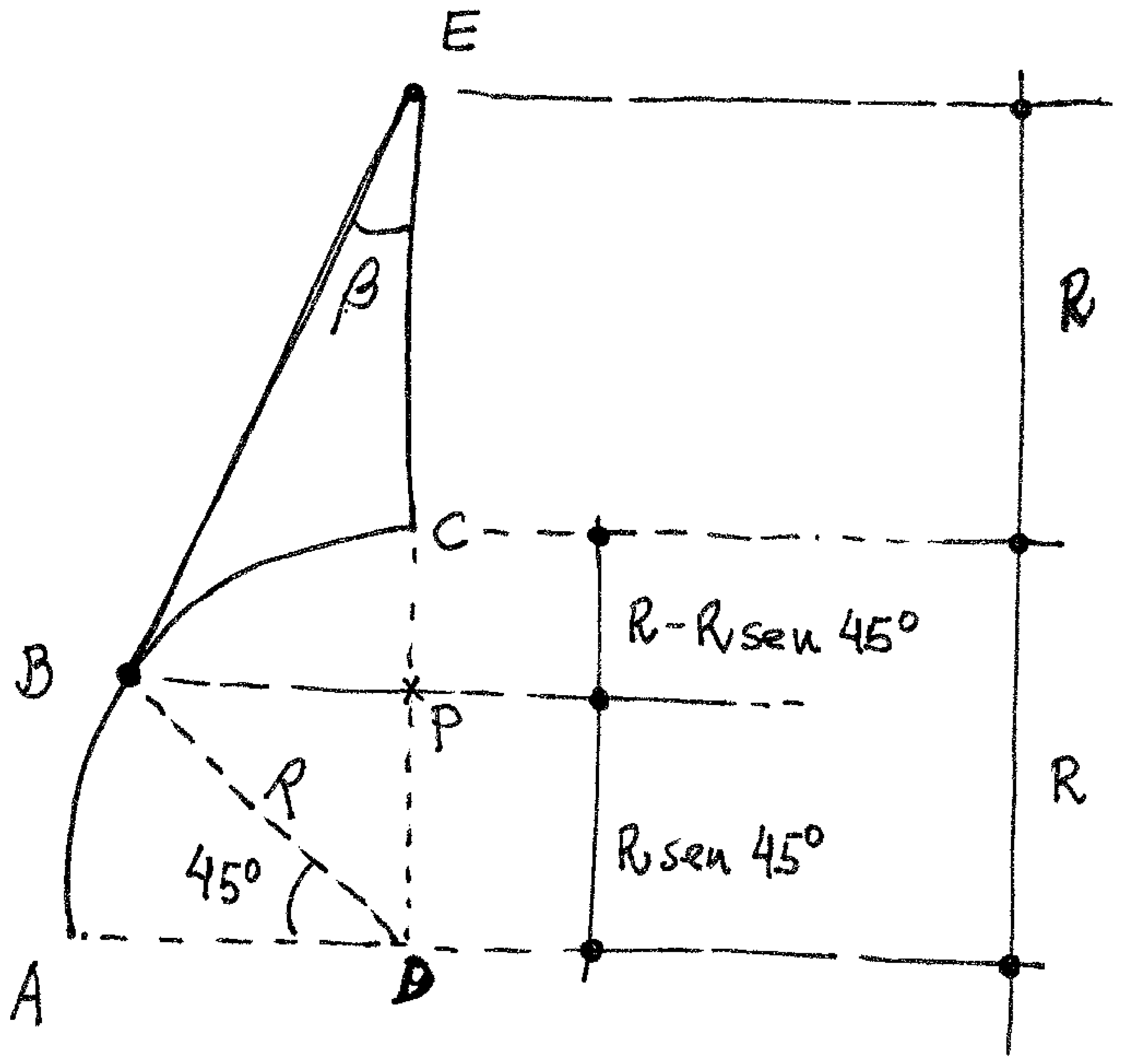
Radio disco $= R = OP = OB \cdot \text{sen}\,\alpha = 8m \cdot \text{sen}\,10° = 1'39\ m$

$OC = OP = R = 1'39m \longrightarrow OC = AO \cdot \text{sen}\,\beta \Rightarrow \beta = \text{arcsen}\frac{OC}{AO} = \text{arcsen}\frac{1'39}{4} = 20'33°$

$AC = AO \cdot \cos\beta = 4 \cdot \cos 20'33° = 3'75\ m$

EJEMPLO - 3

MUY IMPORTANTE: Si en un enunciado nos dicen que el radio de una polea es "despreciable", quiere decir que, a efectos de la geometría de la figura, podemos tratarla como si fuese un punto.



$BP = R\cos 45°$

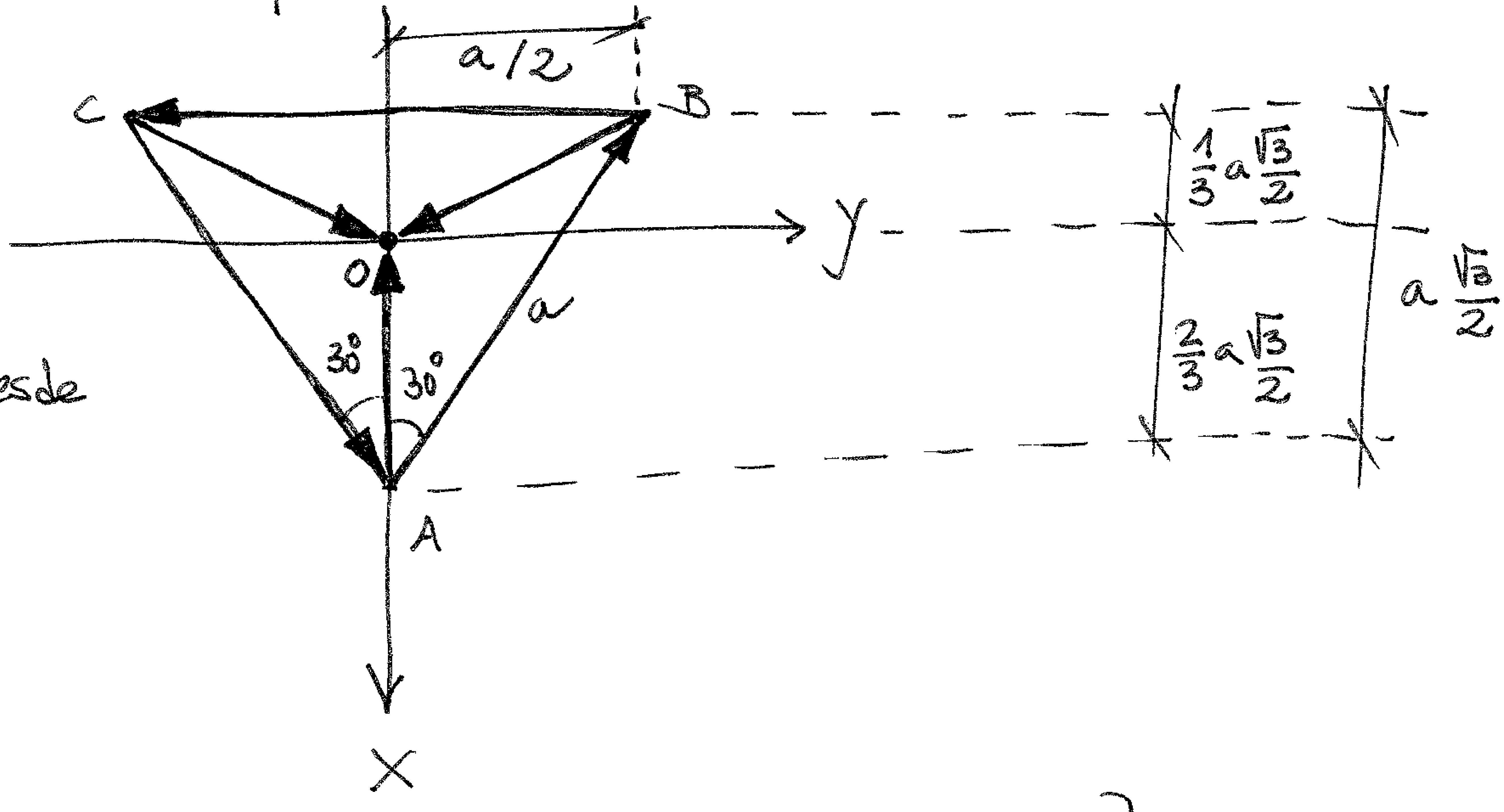
$EP = EC + CP = R + (R - R\,\text{sen}\,45°)$

$= R\,(2 - \text{sen}\,45°)$

$\beta = \text{arctag}\,\dfrac{BP}{EP} = \text{arctag}\,\dfrac{\cancel{R}\cos 45°}{\cancel{R}(2-\text{sen}\,45°)}$

$\boxed{\beta = 28'68°}$

1) En primer lugar se hallan las coordenadas de los vértices. D se proyecta sobre O, que es el baricentro en consecuencia, ya que el tetraedro es regular y O = D"proyectado" equidista de todos los vértices que hay en XY:

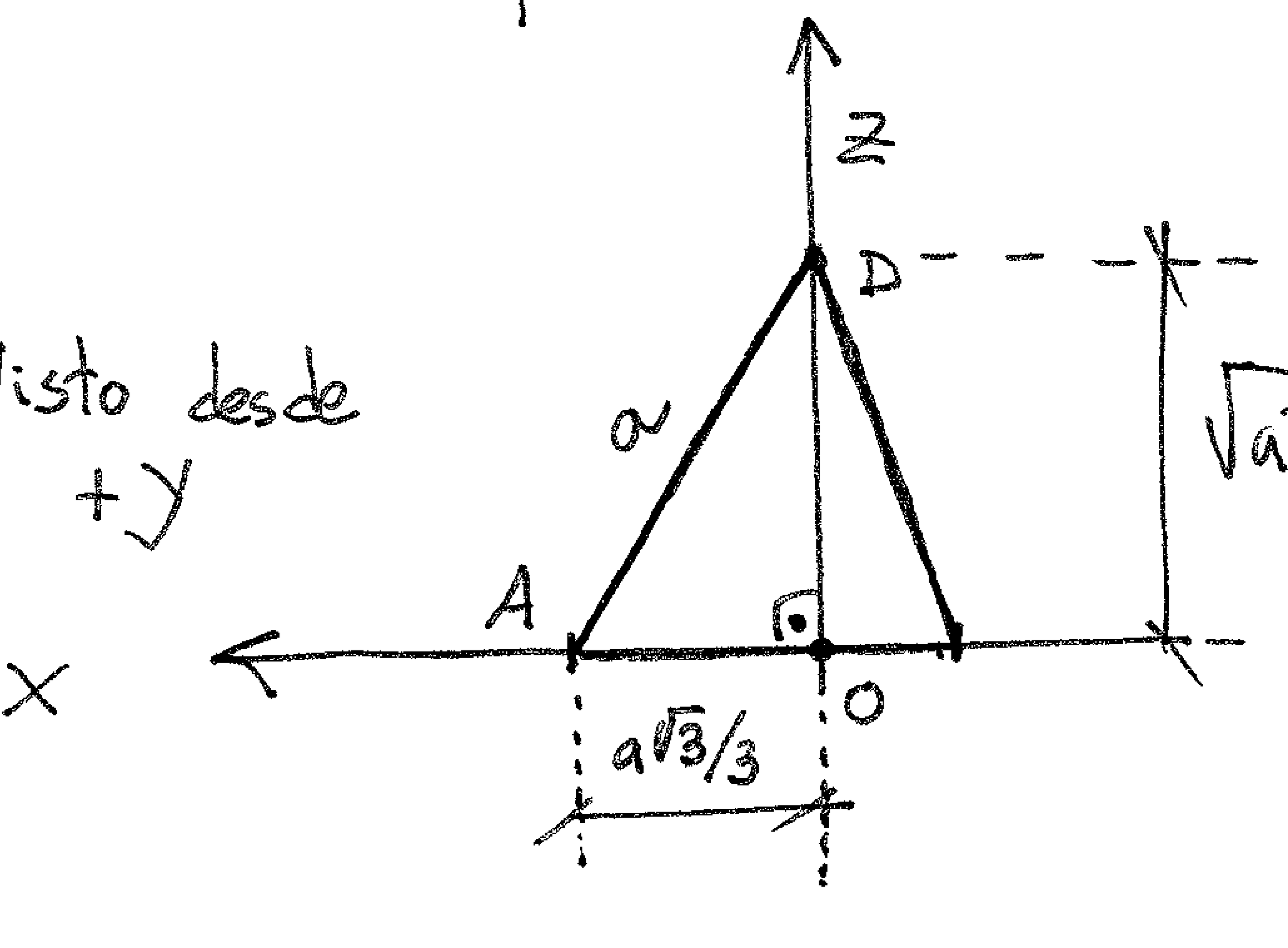


Visto desde +Z

$$A \equiv \left(\frac{2}{3}a\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, 0\right) \equiv \left(a\frac{\sqrt{3}}{3}, 0, 0\right)$$

$$B \equiv \left(-\frac{1}{3}a\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{a}{2}, 0\right) \equiv \left(-a\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{a}{2}, 0\right)$$

$$C \equiv \text{simétrico de } B \text{ respecto } X \equiv \left(-a\frac{\sqrt{3}}{6}, -\frac{a}{2}, 0\right)$$



Visto desde +Y

$$\sqrt{a^2-\left(a\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

Luego $\boxed{D \equiv \left(0, 0, \frac{a\sqrt{6}}{3}\right)}$

EJEMPLO - 5 RELACIONES ENTRE UNIDADES Y CAMBIOS DE UNIDADES

(1) Obtener la relación entre el Vatio y las unidades básicas:

$$\text{Vatio} \longrightarrow \text{Potencia} = W = \frac{T}{t} = \frac{E}{t} = \frac{F \cdot d}{t}$$

$$W = \frac{J}{s} = \frac{N \cdot m}{s} = \frac{kg \cdot m}{s^2} \cdot \frac{m}{s} = \frac{kg \cdot m^2}{s^3}$$

(2) Se sabe que la potencia de una máquina se calcula con la expresión $W = \frac{m\,L\,g}{t}$. Si nos dicen que la fórmula debe utilizarse empleando unidades coherentes, y los datos son $m = 2000$ kg, $L = 3$ km, $g = 9'81$ m/s^2, $t = 15$ min, se pide obtener la potencia en kW:

Pasamos a unidades coherentes básicas del S.I. (m, s, kg):

$$m = 2000 \text{ kg}, \quad L = 3 \cancel{km} \frac{1000 \text{ m}}{1 \cancel{km}} = 3000 \text{ m}, \quad g = 9'81 \text{ m/s}^2$$

$$t = 15 \cancel{min} \cdot \frac{60 \text{ s}}{1 \cancel{min}} = 900 \text{ s} \implies W = \frac{2000 \text{ kg} \cdot 3000 \text{ m} \cdot 9'81 \text{ m/s}^2}{900 \text{ s}} =$$

$$= 65400 \frac{kg \cdot m^2}{s^3} = 65400 \text{ W} = 65'4 \text{ kW}$$

(3) Una masa de 1200 kg se apoya repartiendo su peso uniformemente sobre un cuadrado de 3 in. de lado. Hallar la presión generada en $\frac{kp}{cm^2}$, MPa y $\frac{N}{mm^2}$:

$$S = 3 \text{ in} \cdot 3 \text{ in} = 9 \cancel{in^2} \frac{25'4^2 \text{ mm}^2}{1^2 \cancel{in^2}} = 228'6 \text{ mm}^2$$

Por ser el reparto del peso uniforme podemos usar

$$P = \frac{F}{S} = \frac{m \cdot g}{S} = \frac{1200\ kg \cdot 9'81\ \frac{m}{s^2}}{228'6\ mm^2} = \frac{11772\ N}{228'6\ mm^2} = 51'5\ \frac{N}{mm^2}$$

<u>OJO</u>: Parece que no estemos usando unidades coherentes porque mezclamos m y mm, pero sabemos que $kg \cdot m/s^2 = N$

Ahora obtenemos la equivalencia o "factor de conversión" entre el $\frac{N}{mm^2}$ y el Pa, el MPa y el $\frac{kp}{cm^2}$:

$$1 \frac{N}{\cancel{mm^2}} \cdot \frac{1000^2\ \cancel{mm^2}}{1^2\ m^2} = 10^6 \frac{N}{m^2} = 10^6\ Pa$$

pero $1\ MPa = 10^6\ Pa$, luego $\Rightarrow 1 \frac{N}{mm^2} = 1\ MPa$.

Entonces la presión es la misma en ambas unidades:

$$P = 51'5 \frac{N}{mm^2} = 51'5\ MPa\ (= 51'5 \cdot 10^6\ Pa)$$

$$P = 51'5 \cdot 10^6 \frac{\cancel{N}}{\cancel{m^2}} \cdot \frac{1\ kp}{9'81\ \cancel{N}} \cdot \frac{1^2\ \cancel{m^2}}{100^2\ cm^2} = 524'97 \frac{kp}{cm^2} \approx 525 \frac{kp}{cm^2}$$

TOMANDO SOLO 4 CIFRAS SIGNIFIC.

<u>NOTA</u>: Si se toma (aproximadamente) $g = 10\ m/s^2$

$$1\ MPa = 10^6\ Pa = 10^6 \frac{\cancel{N}}{\cancel{m^2}} \cdot \frac{1\ kp}{10\ \cancel{N}} \cdot \frac{1^2\ \cancel{m^2}}{100^2\ cm^2} = 10 \frac{kp}{cm^2}$$

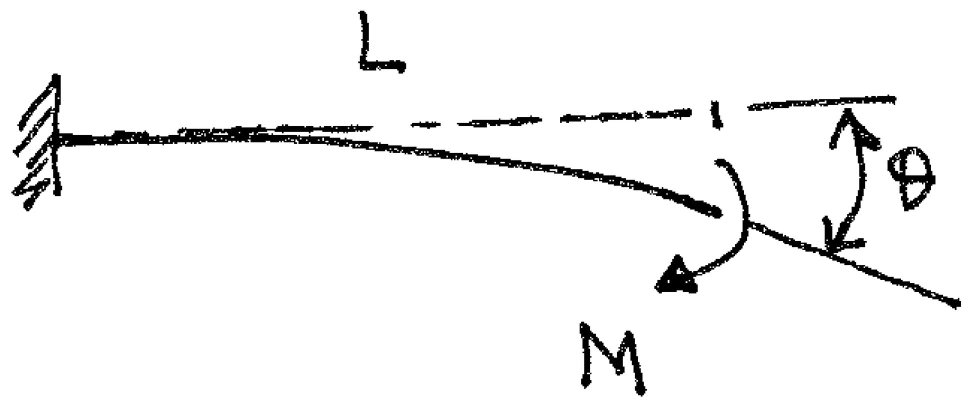
El $\frac{kp}{cm^2}$ ó $\frac{kgf}{cm^2}$ es la unidad en que se mide la presión de los neumáticos (por ejemplo).

④ Nos dicen que apliquemos la fórmula $\theta = \dfrac{M \cdot L}{E \cdot I}$ siendo

$M = 20\ kN \cdot m$, $L = 3\,m$, $E = 210\ GPa$, $I = 1500\ cm^4$,

obteniendo el giro θ en grados:

Esto representa el giro de un voladizo



Si sustituimos directamente en la fórmula <u>no sabremos</u> las unidades del resultado:

$$\theta = \frac{20 \cdot 3}{210 \cdot 1500} = 1'905 \cdot 10^{-4}\ ¿?$$

<u>NOTA</u>: Esto es un fallo muy habitual en muchos alumnos, meter las cantidades en las fórmulas sin preocuparse de las unidades. Yo lo denomino "método de disolución de las unidades", porque quedan mezcladas unas con otras y la disolución (que no solución, porque no es correcta) no se sabe que unidades tiene.

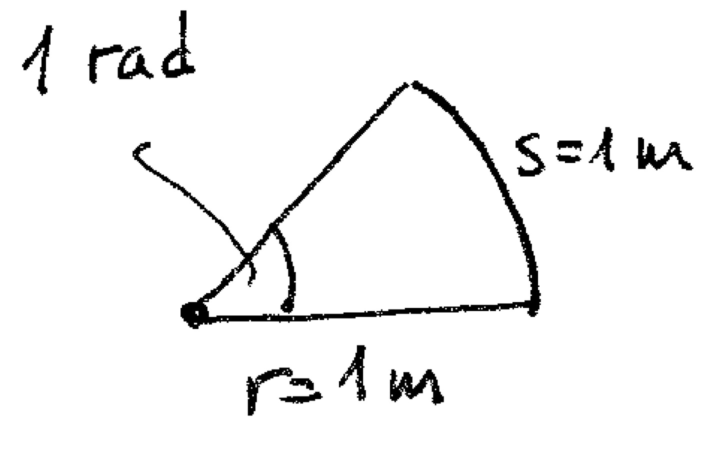
Lo correcto es utilizar el S.I. que es un sistema coherente:

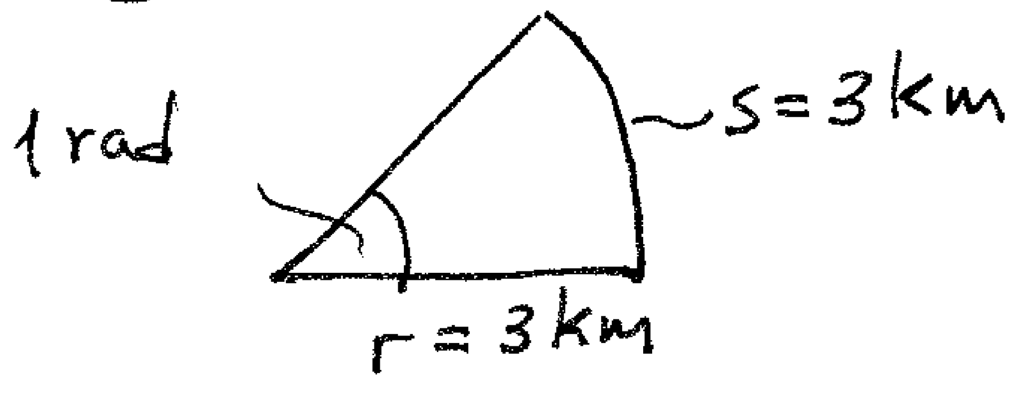
$$M = 20\ \cancel{kN} \cdot m\ \frac{1000\ N}{1\ \cancel{kN}} = 20000\ N \cdot m \qquad L = 3\,m$$

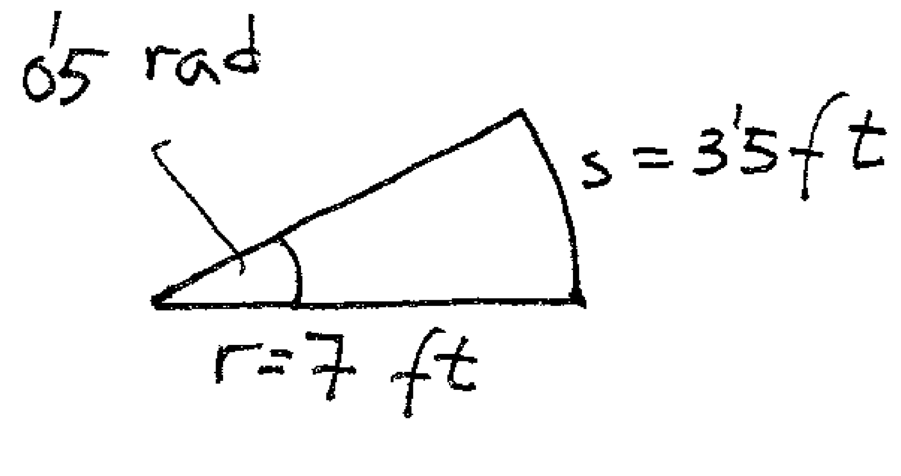
$$E = 210\ GPa = 210 \cdot 10^9\ Pa \qquad I = 1500\ \cancel{cm^4}\ \frac{1^4\ m^4}{100^4\ \cancel{cm^4}} = 1500 \cdot 10^{-8}\ m^4$$

$$\text{luego:} \quad \theta = \frac{20000\ N \cdot m \cdot 3\,m}{210 \cdot 10^9\ Pa \cdot 1500 \cdot 10^{-8}\ m^4} = 0'01905\ \cancel{rad} \cdot \frac{180^\circ}{\pi\ \cancel{rad}} = 1'091^\circ$$

<u>ATENCIÓN</u>: El radián es la unidad estándar de ángulo pero no tiene dimensiones, es un cociente entre dos longitudes: $s = r \cdot \theta \Rightarrow \theta = \dfrac{s}{r}$







⑤ Resolver el apartado ④ pero usando unidades de fuerza en kN y de longitud en m:

$M = 20\ \text{kN}\cdot\text{m}$, $L = 3\ \text{m}$, $I = 1500\cdot 10^{-8}\ \text{m}^4 \longleftarrow$ Esto lo sabemos de antes

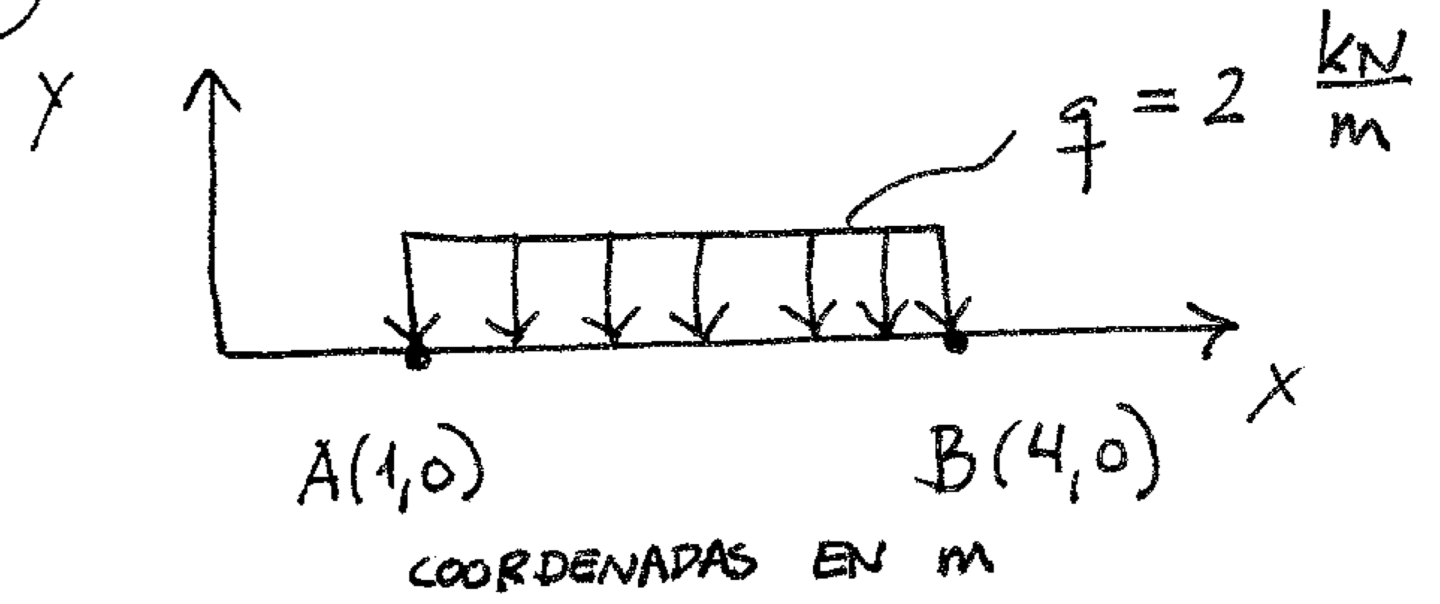
$$E = 210\ \text{GPa} = 210\cdot 10^9\ \text{Pa} = 210\cdot 10^9\ \frac{\text{N}}{\text{m}^2}\cdot\frac{1\ \text{kN}}{1000\ \text{N}} = 210\cdot 10^6\ \underbrace{\frac{\text{kN}}{\text{m}^2}}_{\text{kPa}}$$

luego: $$\theta = \frac{20\ \cancel{\text{kN}}\cdot\text{m}\ \cdot\ 3\text{m}}{210\cdot 10^6\ \frac{\cancel{\text{kN}}}{\text{m}^2}\cdot 1500\cdot 10^{-8}\ \text{m}^4} = 0'01905\ \frac{\cancel{\text{m}^4}}{\cancel{\text{m}^4}} = 0'01905\ \text{rad}$$

igual que antes

<u>NOTA</u>: Este es un procedimiento muy habitual en problemas de <u>ESTÁTICA</u>, en los que pueden manejarse únicamente unidades de FUERZA y de LONGITUD.

⑥ Hallar el momento en B usando la siguiente expresión:



$$M_B = \int_{x_A}^{x_B} q\cdot(x_B - x)\cdot dx$$

<u>MUY IMPORTANTE</u>: La integración, como la diferenciación, no alteran las unidades de una magnitud ya que la integración representa una suma y la diferenciación es simplemente una cantidad muy pequeña (arbitrariamente pequeña) de algo.

Pero ojo, las unidades de los límites de integración deben ser las mismas que las de la variable de integración, es decir las unidades de x_A, x_B y dx son las mismas.

Analizamos las unidades del momento M_B antes de resolver

$$M_B = \int_{x_A(m)}^{x_B(m)} q\left(\frac{kN}{m}\right)\cdot \underbrace{\left[x_B(m) - x(m)\right]}_{m} \cdot dx(m) \longrightarrow \frac{kN}{m}\cdot m \cdot m = kN\cdot m$$

$$M_B = \int_{1\,m}^{4\,m} 2\,\frac{kN}{m}\cdot\left[4m - x\right]\cdot dx = 9\ kN\cdot m \qquad \left[\int_1^4 2(4-x)\,dx = 9\right]$$

(7) Hallar la energía total consumida para mover una placa de superficie $S = 400\ mm^2$ mediante una presión $P = \gamma \cdot z$ donde $\gamma = 500\ lb/ft^3$ y $z = 2m$, sabiendo que la velocidad a la que se mueve es $v = (150 + 10\cdot t)\ \frac{km}{h}$ con t en segundos, y el movimiento dura desde $t=0$ hasta $t = 0'1$ horas. Utilizar la fórmula:

$$E = \int_{t_{inicial}}^{t_{final}} P\cdot S\cdot v\cdot dt \xrightarrow[\text{comprobamos}]{} E(J) = \int \frac{N}{\cancel{m^2}}\cdot \cancel{m^2}\cdot \frac{m}{\cancel{s}}\cdot \cancel{s} = N\cdot m = J$$

correcto

Pasamos todo a S.I.: $S = 400\ mm^2\ \frac{1^2\ m^2}{1000^2\ mm^2} = 4\cdot 10^{-4}\ m^2$

$$\gamma = 500\ \frac{lb}{ft^3}\cdot\frac{4'448\ N}{1\ lb}\cdot\frac{1^3\ ft^3}{0'3048^3\ m^3} = 78540\ \frac{N}{m^3}\ \text{(acero)}$$

$z = 2\ m$, $\quad v = (150 + 10\cdot t)\ \frac{km}{h}\cdot\frac{1000\ m}{1\ km}\cdot\frac{1\ h}{3600\ s} = \frac{150 + 10t}{3'6}\ \frac{m}{s}$ con t en s

$t_{inic} = 0\ s$, $\quad t_{final} = 0'1$ horas $= 6$ min $= 360\ s$

$$E = \int_{0\,s}^{360\,s} 78540\ \frac{N}{m^3}\cdot 2m\cdot 4\cdot 10^{-4}\ m^2\cdot \frac{150 + 10t}{3'6}\ \frac{m}{s}\ dt = 17'45\cdot\int_0^{360}(150 + 10\cdot t)\,dt = 12249900\ J$$

$$= 12249'9\ kJ$$